中南大学数学院06级本科学位论文答辩

HVC中基于分形理论的受力和能量传递模型研究

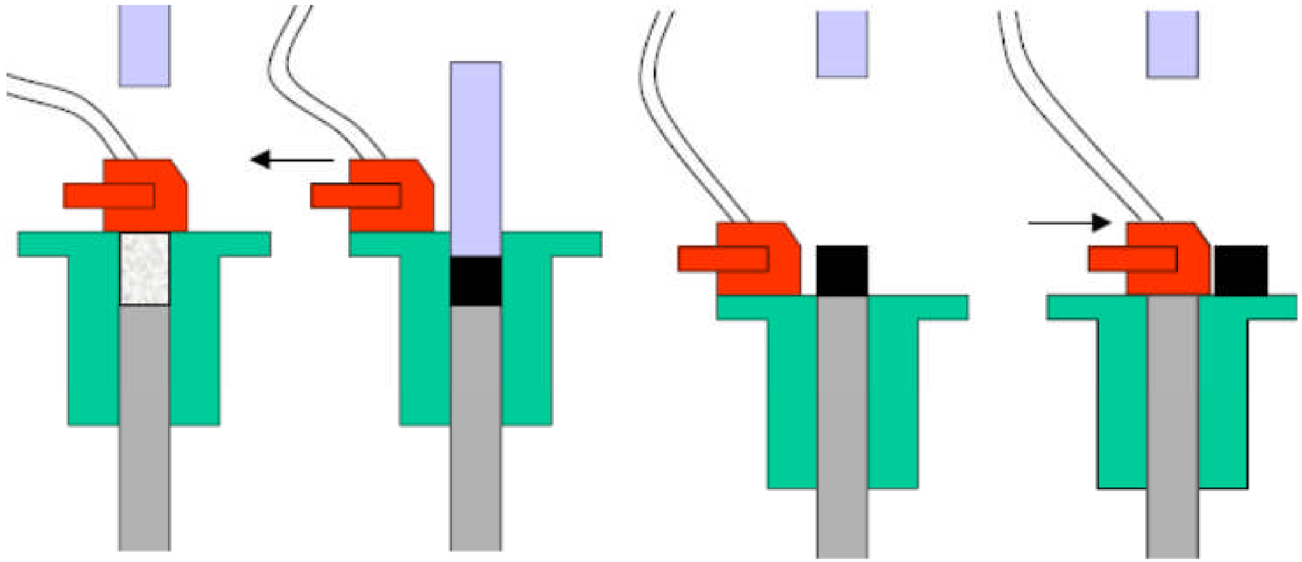
学生姓名：郭煜
指导教师：秦宣云
专业班级：应数0601
答辩时间：2010年6月5日

本论文的目录结构

背景介绍

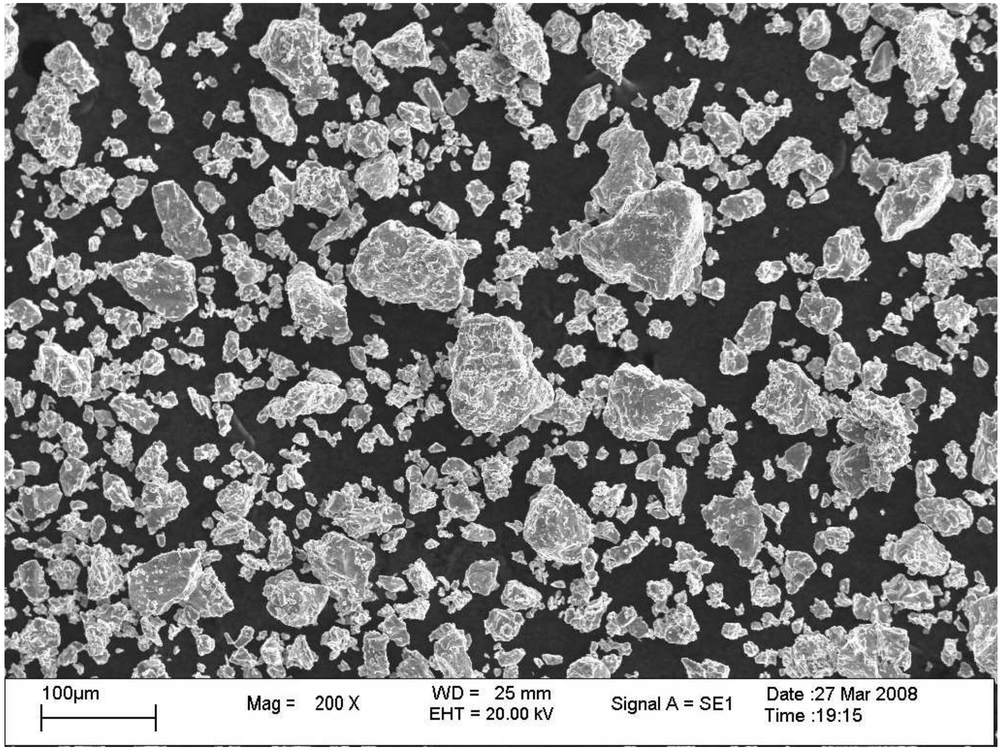
- 2001年6月，瑞典的Hoganas AB公司的Paul Skoglund提出了高速压制（High Velocity Compaction，简称HVC）技术。特点：高的压制速度，到达更高更均匀的密度，产品成本低性能好。
- 1973年，B.B.Mandelbrot首次提出了分维和分形几何的设想。从整体上看，分形几何图形是处处不规则的。在不同尺度上，图形的规则性又是相同的。分形维数一般大于其拓扑维数。

压制过程示意图



粉末体受力：正应力(压制压力)，轴向应力，下模冲应力，外摩擦力，内摩擦力，脱模压力[单位：N/m^2]

粉末散体空间结构特征

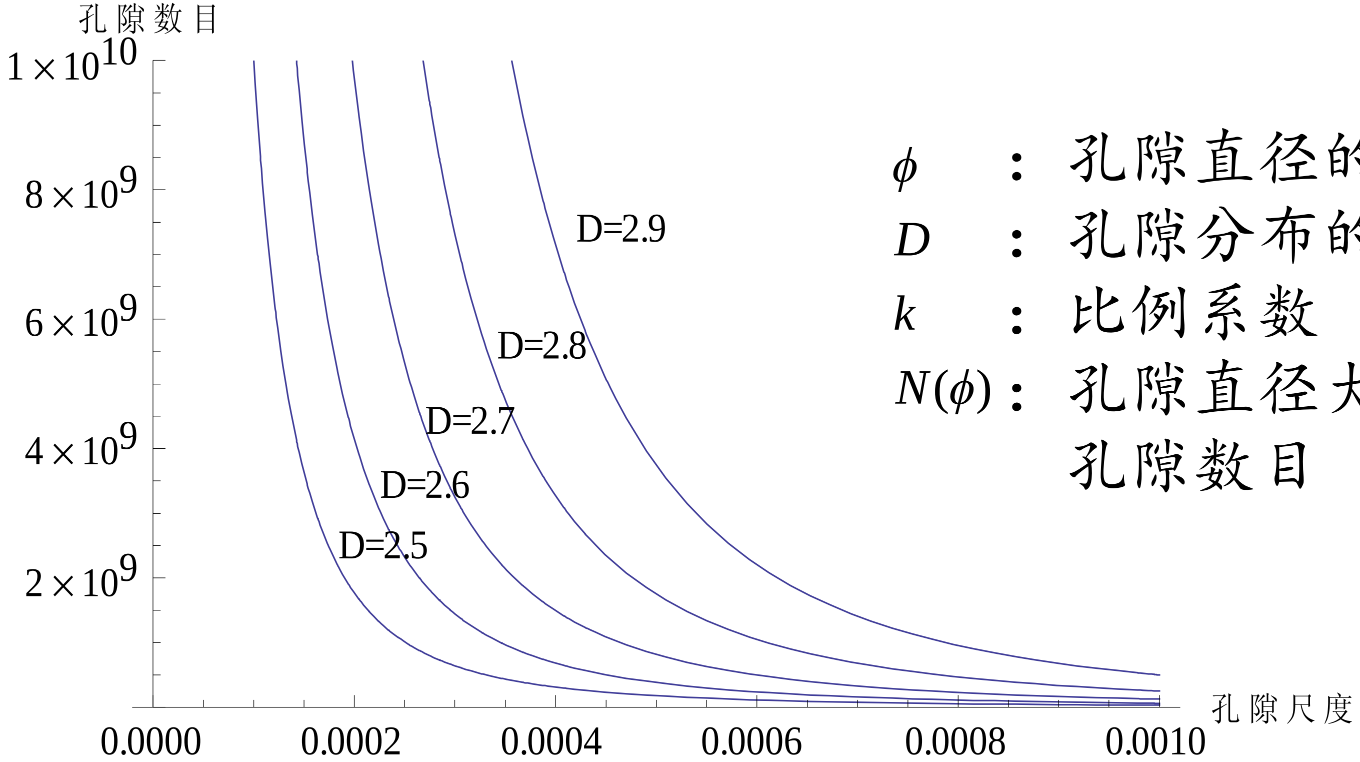


Ti粉末的微观结构：
亮色区为粉末颗粒
暗色区为孔隙(介质)
图中尺度0.1mm

孔隙具有体分形特性，粉末颗粒表面具有面分形特性
在压制过程中引入分形维数

第三章　　3.1孔隙数目与孔隙尺度

$$N(L>\phi)=k\phi^{-D}$$



ϕ　：孔隙直径的测量尺度

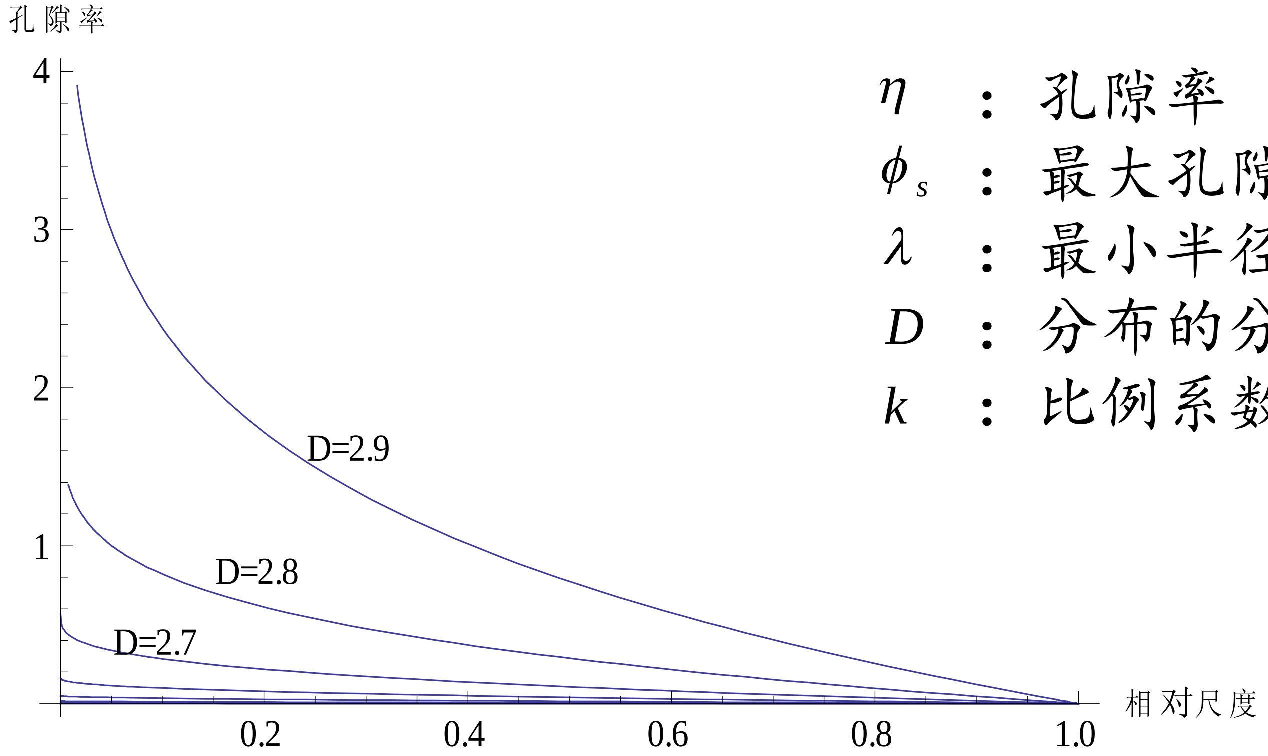
D　：孔隙分布的分形维数

k　：比例系数

$N(\phi)$：孔隙直径大于尺度的孔隙数目

第三章　　3.1孔隙率与孔隙相对尺度

$$\eta = \frac{kD}{3-D}\phi_s^{3-D}(1-\lambda^{3-D})$$



η ： 孔隙率

ϕ_s ： 最大孔隙半径

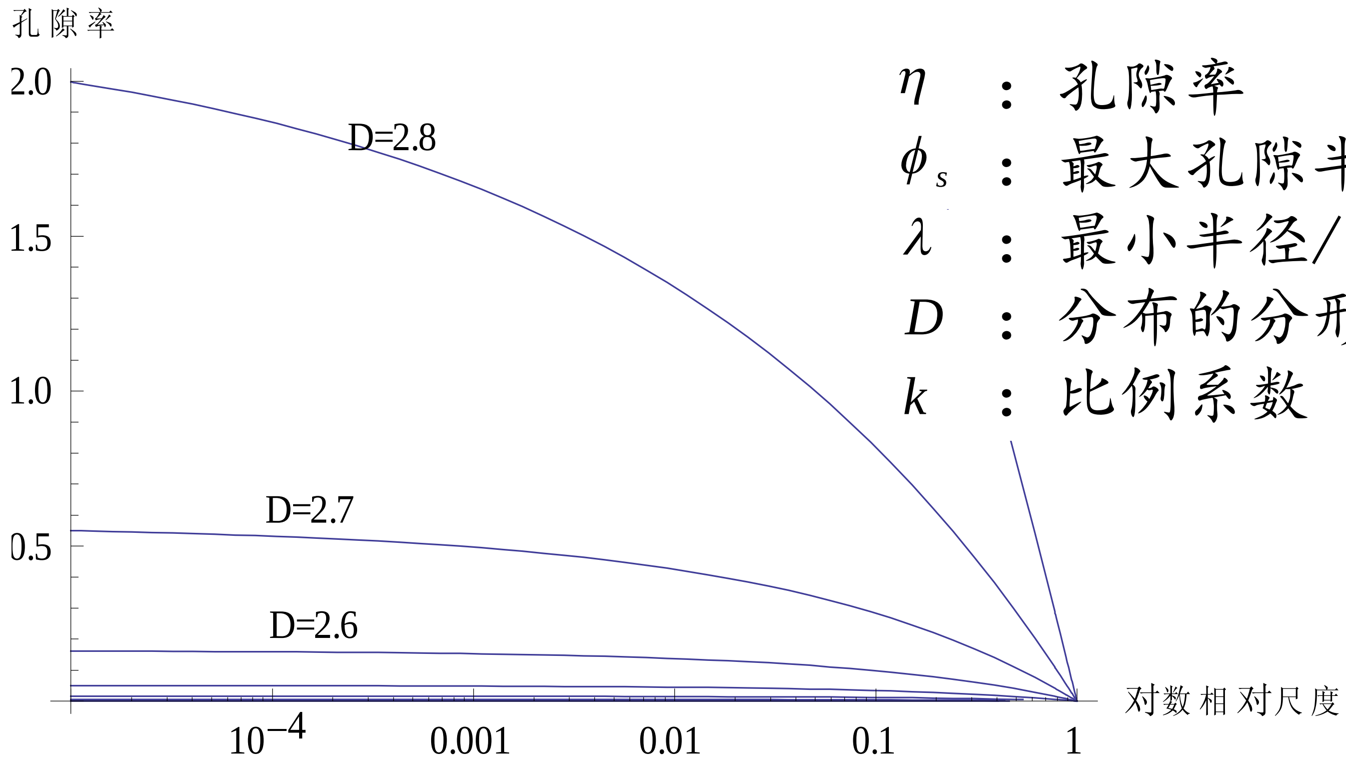
λ ： 最小半径/最大半径

D ： 分布的分形维数

k ： 比例系数

第三章　　3.1孔隙率与孔隙相对尺度

$$\eta = \frac{kD}{3-D}\phi_s^{3-D}(1-\lambda^{3-D})$$



η ： 孔隙率

ϕ_s ： 最大孔隙半径

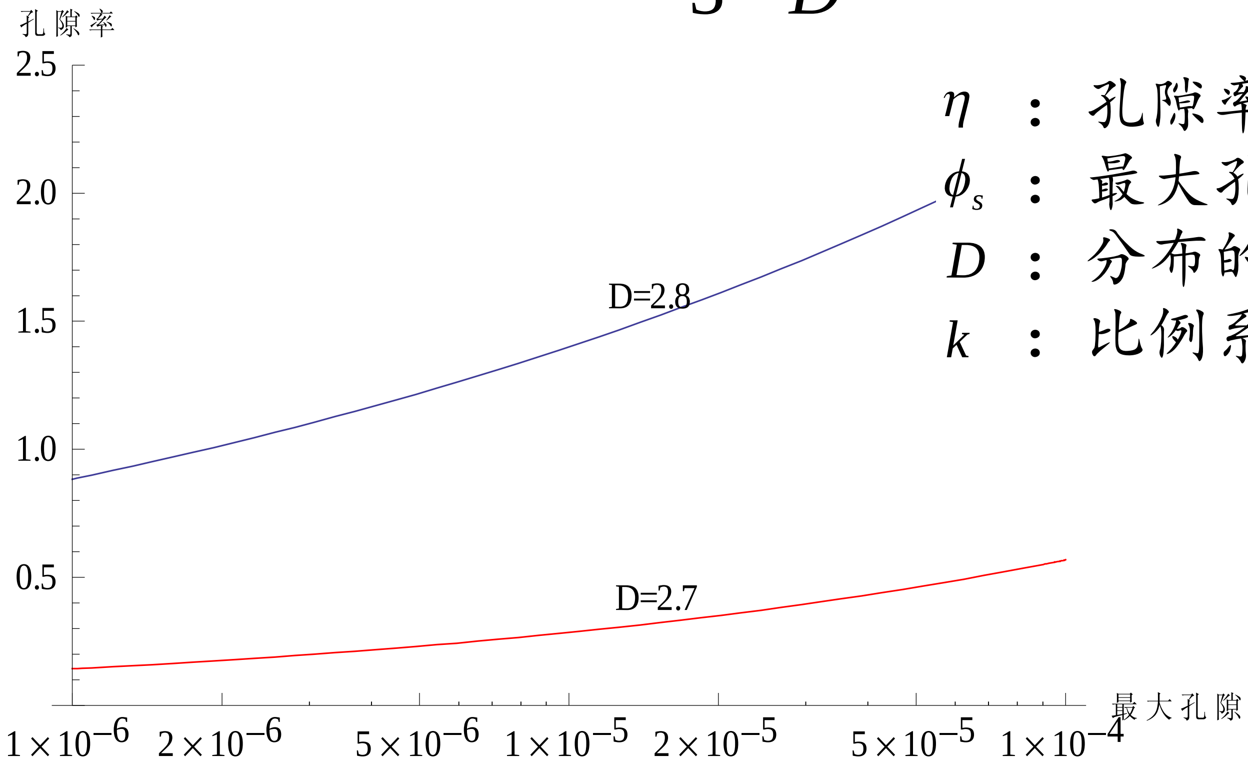
λ ： 最小半径/最大半径

D ： 分布的分形维数

k ： 比例系数

第三章　　3.1孔隙率与最大孔隙半径

$$\eta = \frac{kD}{3-D}\phi_s^{3-D}$$



η ： 孔隙率

ϕ_s ： 最大孔隙半径

D ： 分布的分形维数

k ： 比例系数

第三章　　3.1孔隙率与体积、密度的关系

通过孔隙体积，以及致密粉末的密度，建立压制前后粉末体的孔隙率与粉末表观体积、表观密度间的关系

$$V_m = \frac{1-\eta_o}{1-\eta_m} V_o$$

$$\rho_m = \frac{1-\eta_m}{1-\eta_o} \rho_o$$

η_o、η_m：压制前后孔隙率

ρ_o、ρ_m：压制前后密度

V_o、V_m：压制前后体积

第三章　3.2应力模型

通过胡克定律及弹性粘滞固体性质，考虑到应变弛豫和应力弛豫，建立应力的标准线性模型：

$$\sigma + \tau_1 \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = E(\varepsilon + \tau_2 \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t})$$

考虑到粉末体的加工硬化，建立应力的标准线性模型：

$$\sigma + \tau_1 \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = E(\varepsilon + \tau_2 \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t})^n \quad n > 1$$

σ：应力　　t：压制时间

ε：应变　　τ_1：应力弛豫时间

E：弹性模量　　τ_2：应变弛豫时间

第三章　　3.2应力模型

应力分为正应力和剪应力。假设：a) 只存在沿着压制方向的正应力，剪应力为零；2) 压制过程充分弛豫。得到非线性正应力与应变模型：

$$\varepsilon = \left(\frac{p}{E}\right)^{1/n}$$

应用自然应变的概念，得到应变与体积的关系：

$$\varepsilon = \ln\frac{V_o - V}{V_m - V} = \ln\frac{(\rho-\rho_0)\rho_m}{(\rho-\rho_m)\rho_0} = \ln\frac{\eta_o(1-\eta_m)}{\eta_m(1-\eta_o)}$$

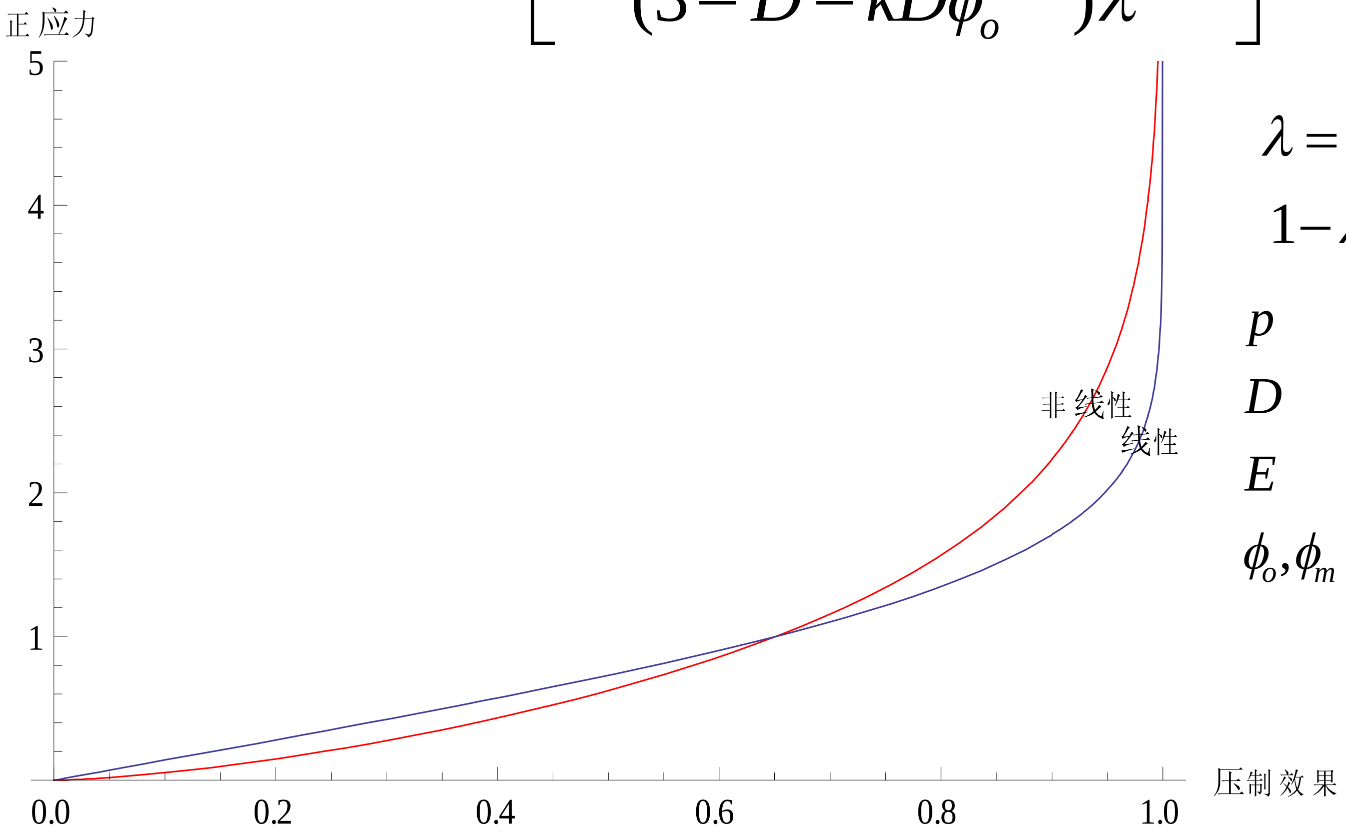
p ： 正应力　　V ： 体积

ε ： 应变　　ρ ： 密度

E ： 弹性模量　　η ： 孔隙率

第三章　　3.3正应力与压制效果

$$p = E\left[\ln\frac{3-D-kD\phi_o^{3-D}\lambda^{3-D}}{(3-D-kD\phi_o^{3-D})\lambda^{3-D}}\right]^n$$



$$\lambda = (\phi_o - \phi_m)/\phi_o$$

$$1-\lambda = \phi_m/\phi_o$$

p ：正应力

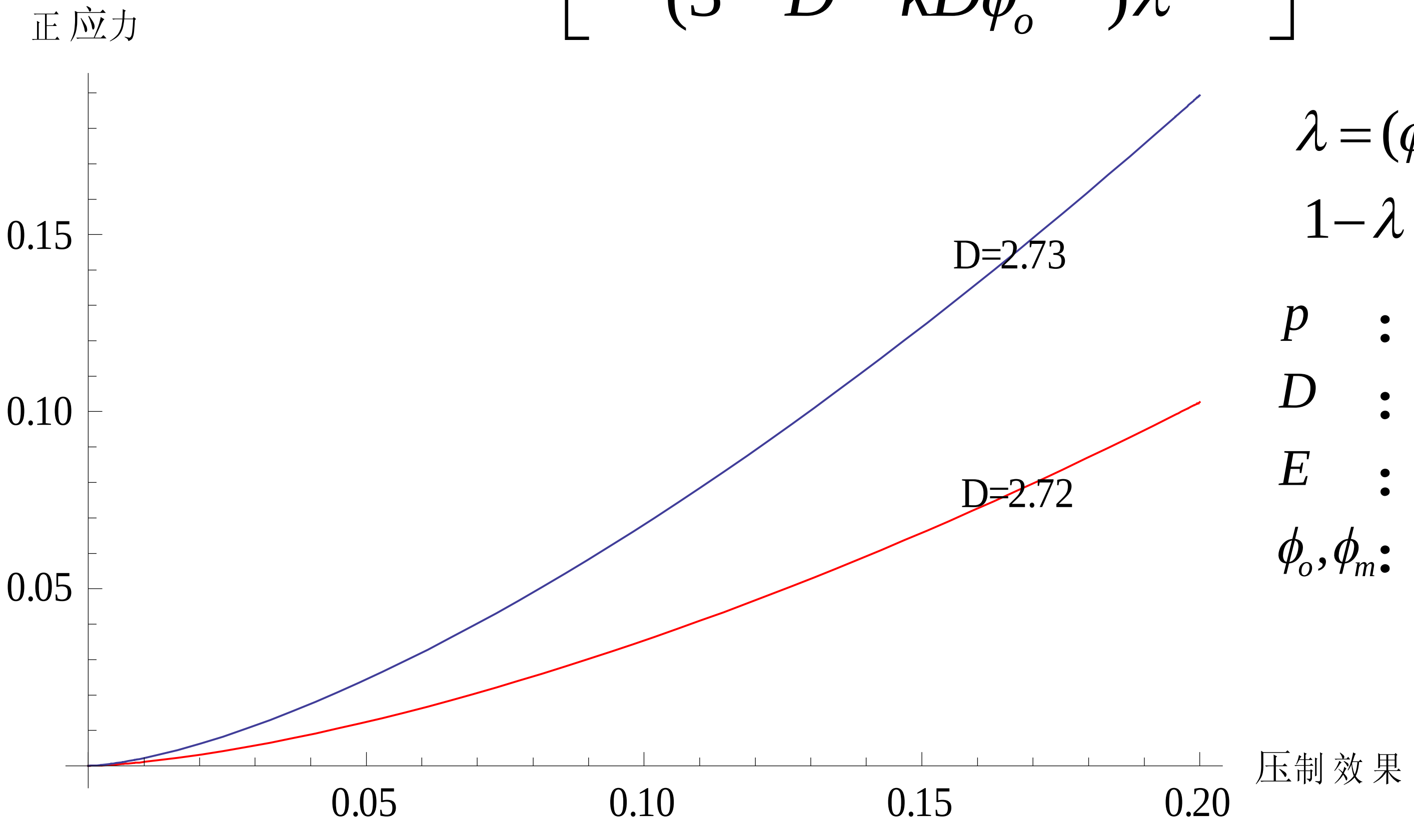
D ：分形维数

E ：弹性模量

ϕ_o, ϕ_m：最大孔径

第三章　　3.3正应力与压制效果

$$p = E\left[\ln\frac{3-D-kD\phi_o^{3-D}\lambda^{3-D}}{(3-D-kD\phi_o^{3-D})\lambda^{3-D}}\right]^n$$



$$\lambda = (\phi_o - \phi_m)/\phi_o$$

$$1-\lambda = \phi_m/\phi_o$$

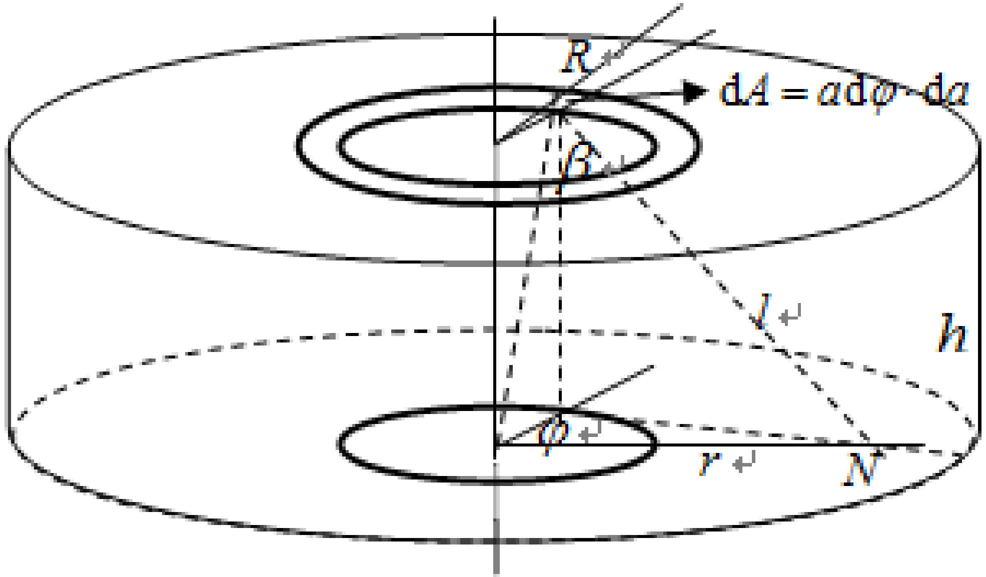
p ：正应力

D ：分形维数

E ：弹性模量

ϕ_o,ϕ_m：最大孔径

第四章　　4.1轴向应力



圆柱体压坯
总高度H
半径R

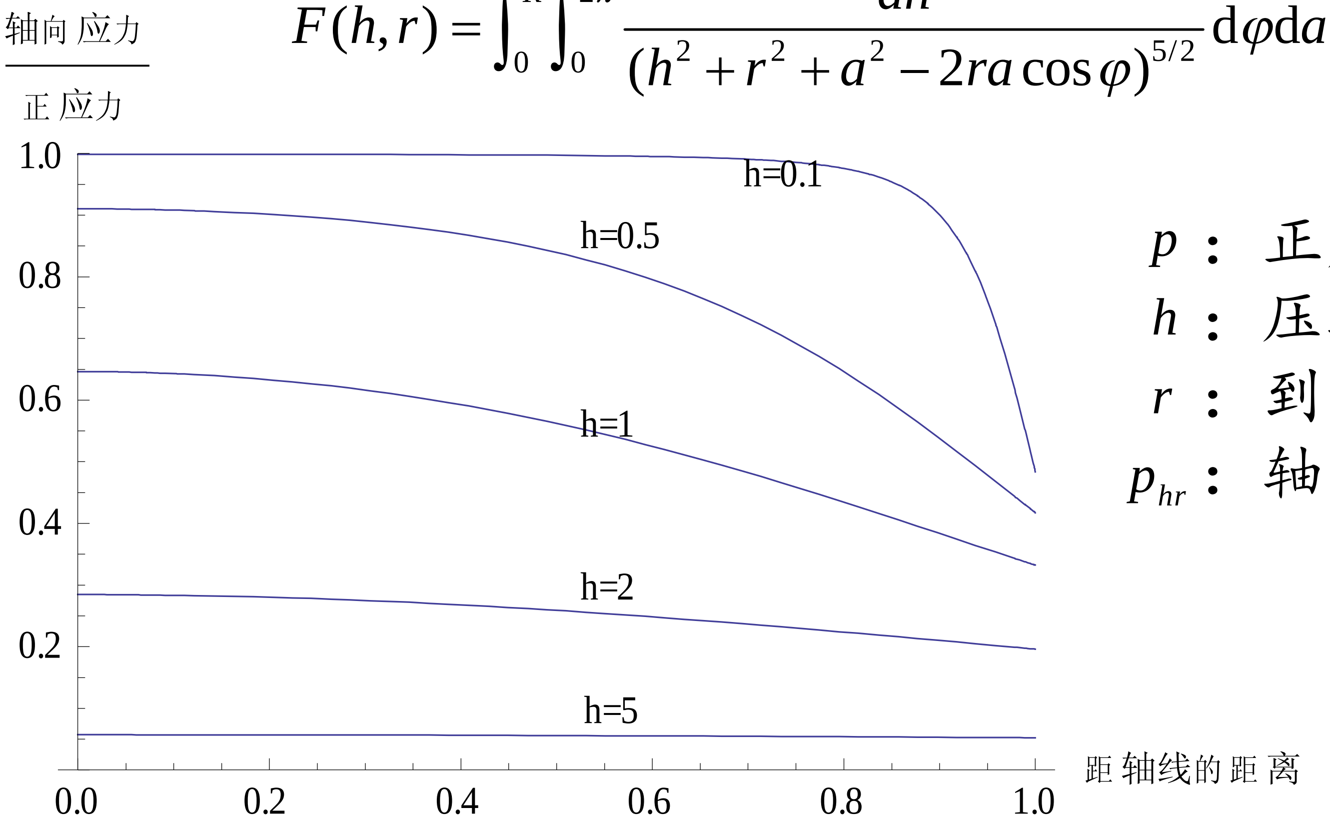
作用于N点的垂直载荷：

$$\sigma_z = \frac{2}{3}\frac{p}{\pi R^2}\cos^3\beta$$

第四章　4.1轴向应力

$$p_{hr} = \frac{3p}{2\pi} F(h,r)$$

$$F(h,r) = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{ah^3}{(h^2 + r^2 + a^2 - 2ra\cos\varphi)^{5/2}} \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}a$$



p：正应力

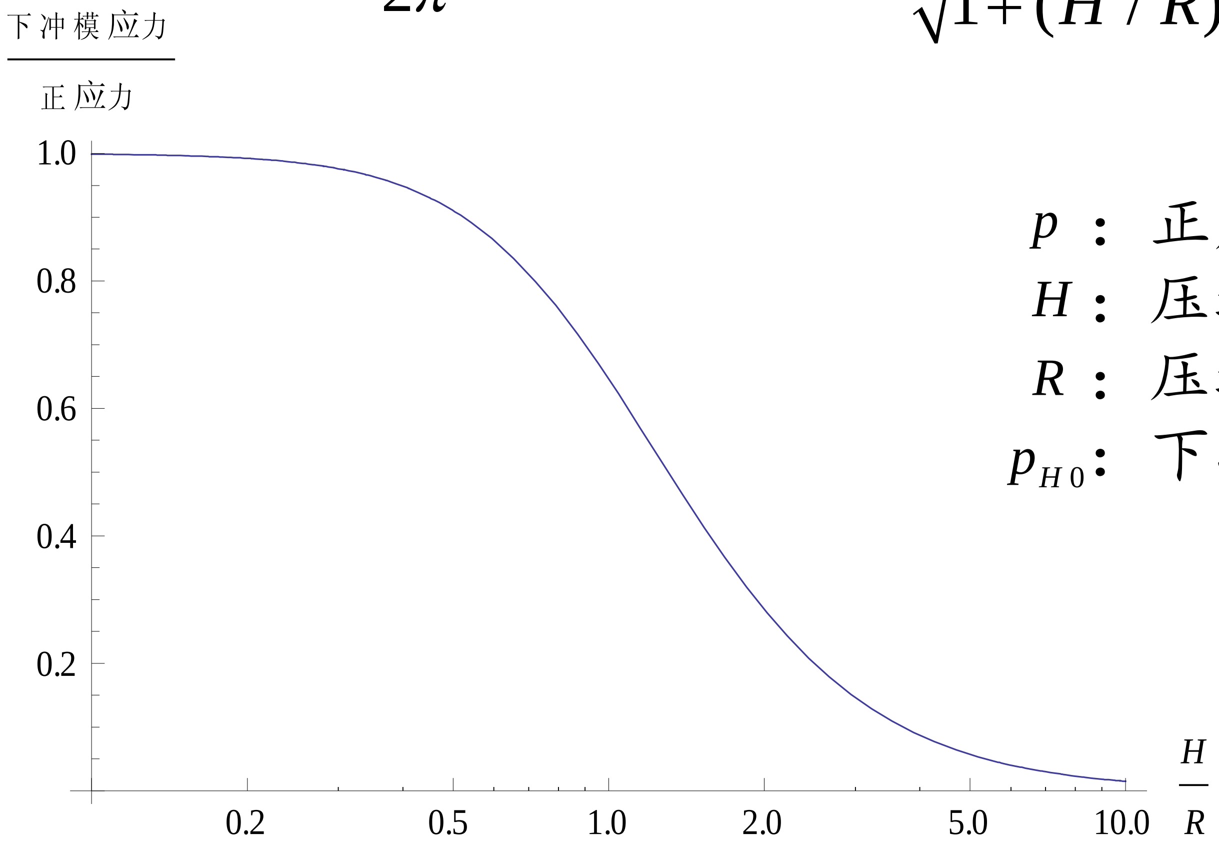
h：压坏深度

r：到中心轴距离

p_{hr}：轴向应力

第四章　　4.2下模冲应力

$$p_{H0}=\frac{3p}{2\pi}F(H,0)=p\{1-[\frac{H/R}{\sqrt{1+(H/R)^2}}]^3\}$$



p：正应力

H：压坯高度

R：压坯半径

p_{H0}：下冲模中心应力

第四章　　4.3修正的轴向应力

$$\hat{p}_{hr} = p_{hr} + p'_{hr}$$

$$p_{hr} = \frac{3p}{2\pi} F(h,r)$$

$$p'_{hr} = \frac{9p}{4\pi^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{F(H,a)a(H-h)^3}{((H-h)^2 + r^2 + a^2 - 2ra\cos\varphi)^{5/2}} \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}a$$

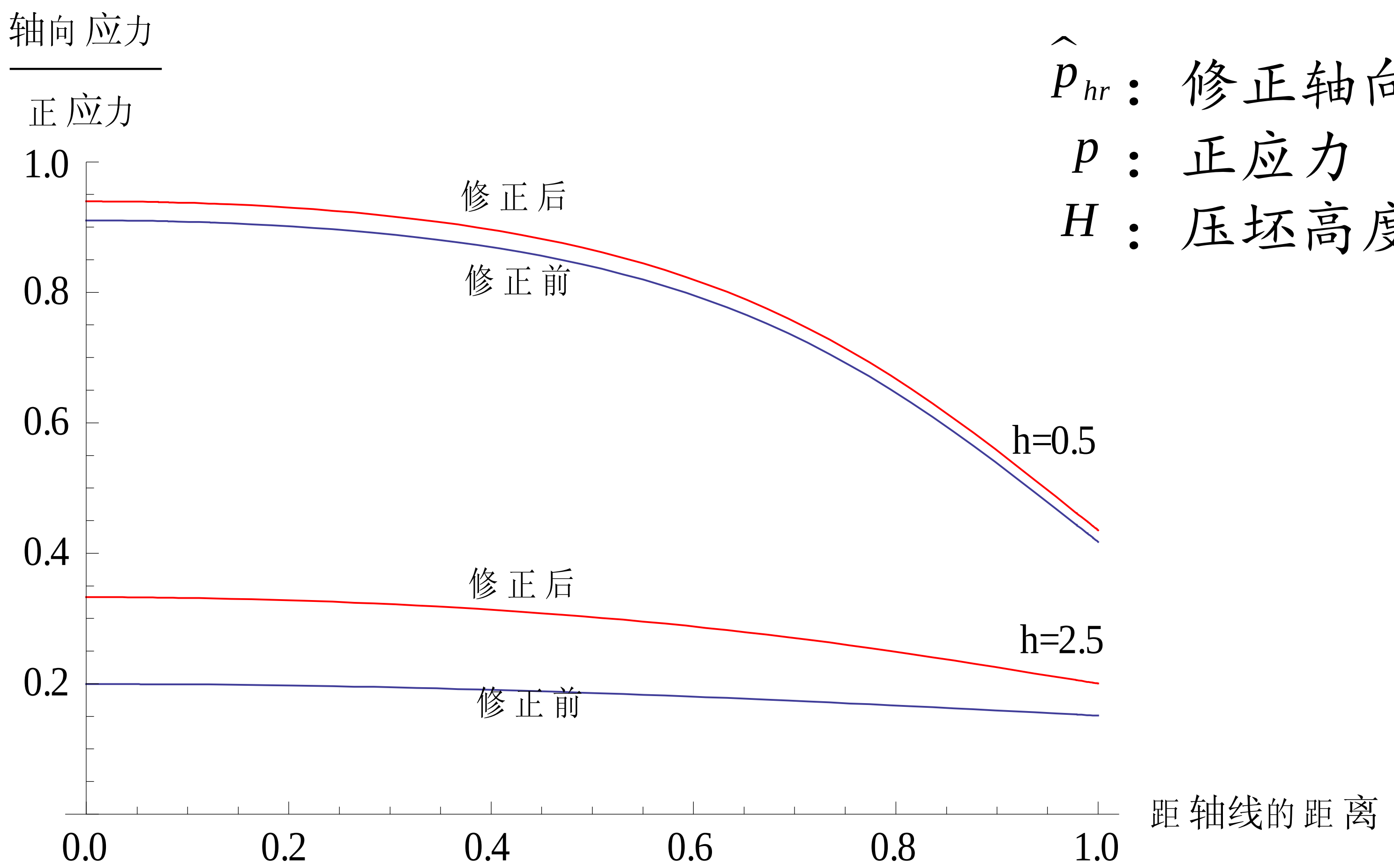
$$F(h,r) = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{ah^3}{(h^2 + r^2 + a^2 - 2ra\cos\varphi)^{5/2}} \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}a$$

$\hat{p}_{hr}$：修正轴向应力

p：正应力

H：压坯高度

第四章 4.3修正的轴向应力



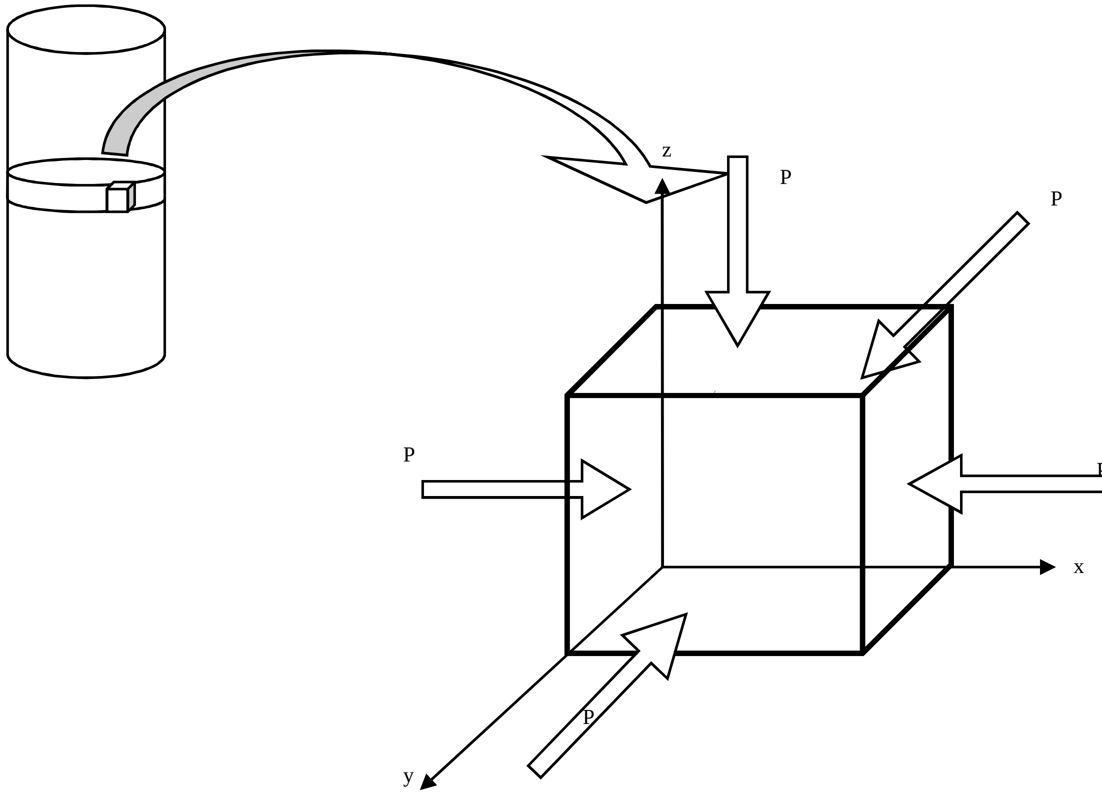
$\hat{p}_{hr}$：修正轴向应力

p：正应力

H：压坯高度

第四章　　4.4模壁压力和外摩擦力

通过各向同性的小立方体来推导水平侧压力与竖直压力的关系



第四章　4.4模壁压力和外摩擦力

模壁压力与外摩擦力都与深度有关

$$p_{h侧} = \frac{3\nu p}{2\pi(1-\nu)} F(h,R)$$

$$p_{h摩} = \frac{3\mu\nu p}{2\pi(1-\nu)} F(h,R)$$

$$F(h,r) = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{ah^3}{(h^2+r^2+a^2-2ra\cos\varphi)^{5/2}} \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}a$$

p ： 正应力

μ ： 动摩擦因素

ν ： 泊松比

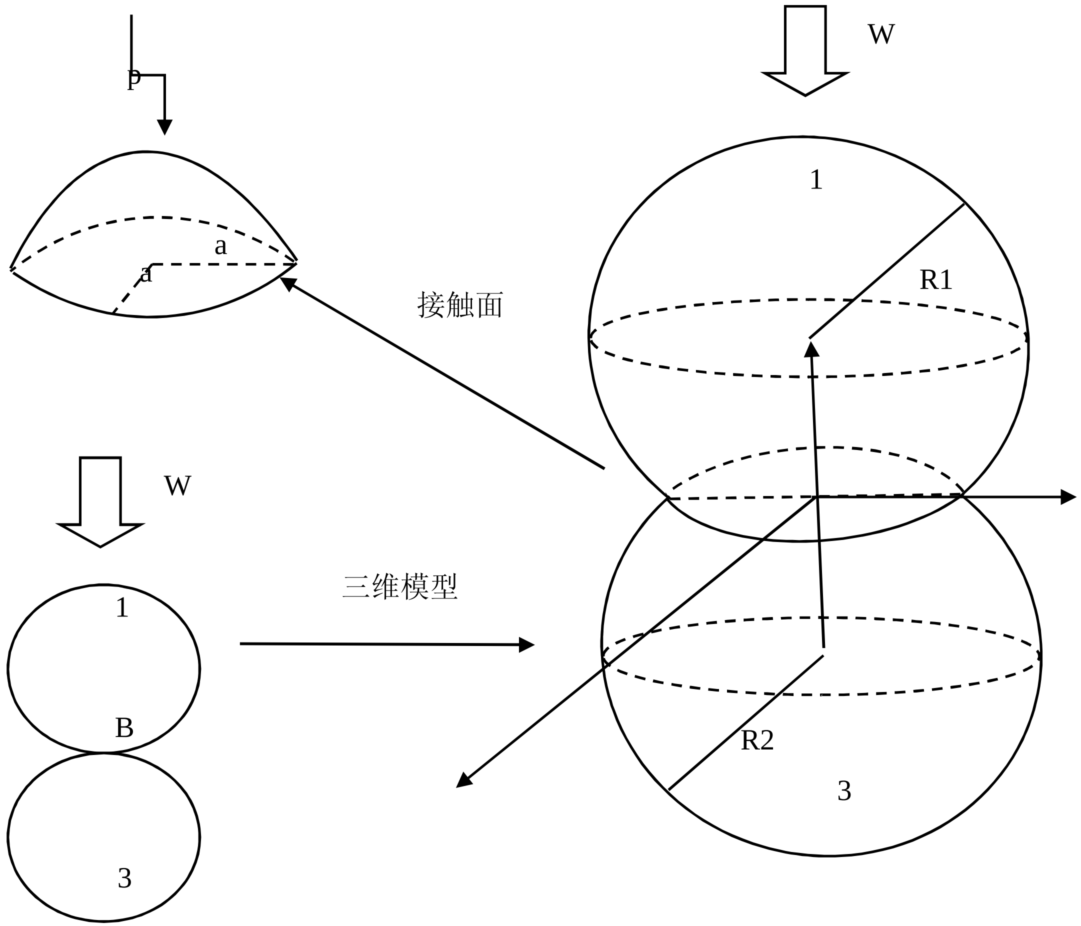
第五章　　5.1Herz三维球形颗粒接触模型

$$a = \left(\frac{3WR}{4E}\right)^{1/3}$$

$$\delta = \left(\frac{9W^2}{16E^2R}\right)^{1/3}$$

$$W = \frac{4}{3}ER^{1/2}\delta^{3/2}$$

$$R = \frac{2R_1R_2}{|R_1 - R_2|}$$



第五章　　5.1Herz三维球形颗粒接触模型

$$a=(\frac{3WR}{4E})^{1/3}$$

$$\delta=(\frac{9W^2}{16E^2R})^{1/3}$$

$$W=\frac{4}{3}ER^{1/2}\delta^{3/2}$$

$$R=\frac{2R_1R_2}{|R_1-R_2|}$$

$$A_0=\iint_S \mathrm{d}S=\iint_D\sqrt{1+z_x'+z_y'}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi R\delta$$

$$A=\pi ab=\pi R\delta=A_0/2$$

$$W=\frac{4E}{3\pi^{3/2}R}A^{3/2}$$

A ：真实接触面积　　W ：载荷

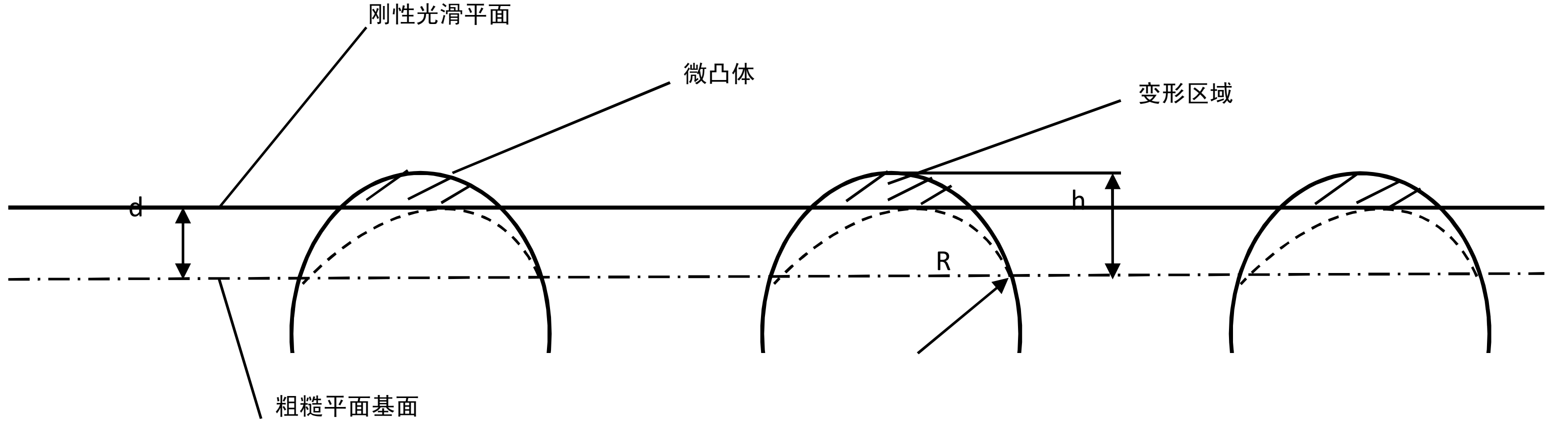
A_0 ：几何接触面积　　R ：接触半径

δ ：法向接近量　　E ：弹性模量

第五章　5.2理想粗糙表面

粉末颗粒表面有许多球形微凸体

这些微凸体的接触可以看做前面的三维球形颗粒接触模型



$$W=\frac{4E}{3\pi^{3/2}n^{1/2}R}A^{3/2}$$

$$W=2p_sA$$

A：真实接触面积

n：颗粒表面微凸体数目

p_s：屈服应力

W：载荷

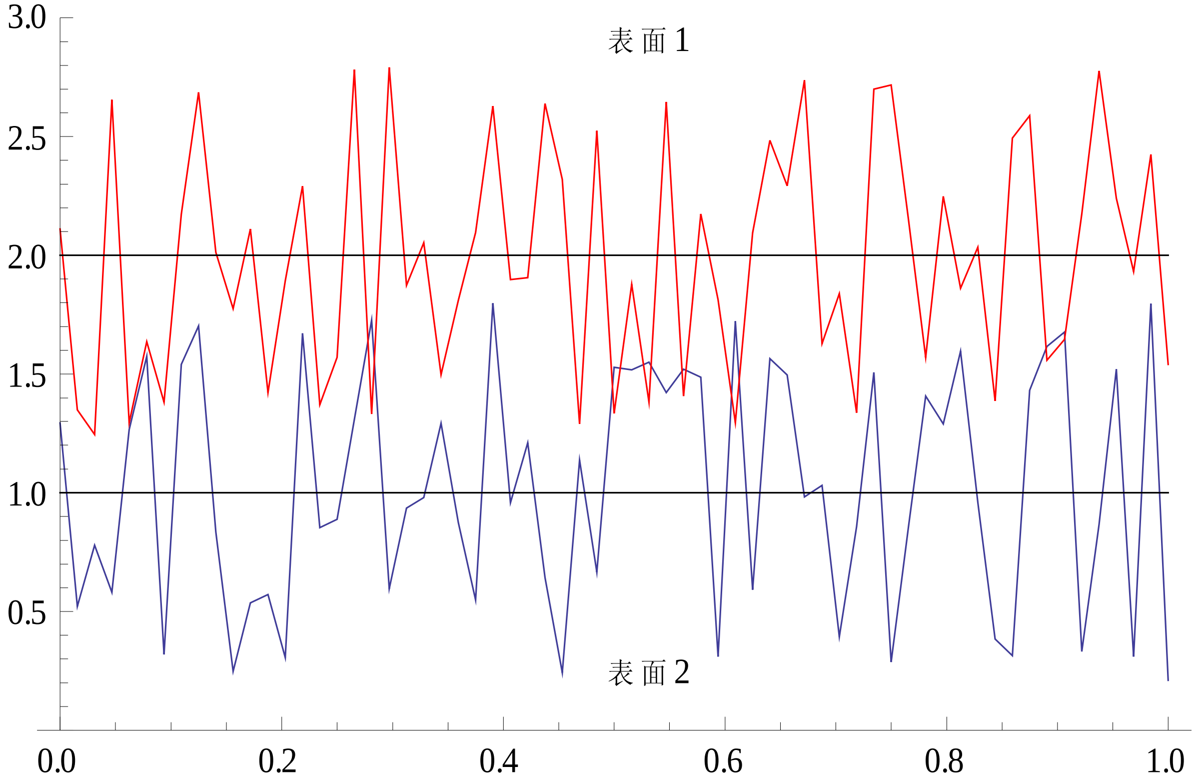
R：接触半径

E：弹性模量

第五章　　5.3实际粗糙表面

随机微凸体峰顶曲率半径 $\rho(z)$　　均方值 σ_c

随机微凸体高度 $\varphi(z)$　　σ



$$\sigma = c\tau^{2-D_f}$$

σ ： 粗糙度

D_f ： 表面分维

τ ： 尺度

第五章　　5.3实际粗糙表面

用指数分布近似粗糙峰的高度分布　$$\varphi(z)=\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{z}{\sigma}}$$

用Gauss分布近似峰顶半径分布　$$\rho(r)=\frac{1}{\sigma_c\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{r^2}{2\sigma_c^2}}$$

弹性接触时，载荷与接触面积的关系　$$W=\frac{2^{\frac{7}{4}}\Gamma(\frac{3}{4})\sqrt{c}E\tau^{\frac{2-D_f}{2}}}{3\pi\sqrt{\sigma_c}}A$$

塑性接触时，载荷与接触面积的关系　$$W=p_sA$$

总结与展望

本文主要做了三个工作：

●推导了基于体分形维数的正应力与压制效果的关系

●推导了轴向应力、下冲模应力、模壁摩擦力、外摩擦力与正应力的关系

●推导了基于面分形维数的载荷与接触面积的关系

最大问题：

由于没有给出压制过程中热量的关系，所以只在文章最后给出了简单的内摩擦模型和能量模型，显然这样是不合理的。

结束

谢谢各位老师的指导！